31/03/2019

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Μπλοκ Διαγώνιοι)

π.χ $A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ "Μπλοκ διαγώνιος". Υποθέτουμε ότι

$T: V \to V$ γραμμική και $V = W_1 \oplus W_2$ ώστε W_i T-αναλλοίωτος (δηλ. $T(W_i) \subseteq W_i$) για $i=1,2$

Έστω $e_1, e_2, \ldots, e_p$ διατετ. βάση του W_1 και $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n$ διατετ. βάση του W_2

Τότε από γρ. αλγ. II $e = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ διατετ. βάση του V.

Για $1 \le i \le p$ έχουμε $T(e_i) \in W_1$, άρα υπάρχουν $a_{ji} \in F$ ώστε $T(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} e_i + \sum_{j=p+1}^{n} 0_F e_i$. Για $p+1 \le i \le n$ έχουμε $T(e_i) \in W_2$ υπάρχουν $a_{ji} \in F$ ώστε $T(e_i) = \sum_{j=1}^{p} 0_F e_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ji} e_j$ (2)

Θέτουμε $T_1 : T|_{W_1} : W_1 \to W_1$

$T_2 : T|_{W_2} : W_2 \to W_2$.

Τότε T_1, T_2 γραμμικές και απ' τις (1), (2) έχουμε

$$[T]_e^e = \begin{bmatrix} [T_1]_{(e_1 \ldots e_p)}^{(e_1 \ldots e_p)} & \mathbb{O}_{p \times (n-p)} \\ \mathbb{O}_{(n-p)\times p} & [T_2]_{(e_{p+1}, \ldots, e_n)} \end{bmatrix}$$

π.χ αν $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$ έχουμε $[T]_e^e$ διαγώνιος. Πιο γενικά υποθέτουμε $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$ ώστε κάθε W_i είναι T-αναλλοίωτο (δηλ $T(W_i) \subseteq W_i$) για κάθε $1 \le i \le s$. Θέτουμε $T_i = T|_{W_i}$ $W_i \to W_i$

Έστω για $1 \le i \le s$ $\tilde{g_i}$ διατετ. βάση του W_i

Θέτουμε e = στοιχεία της $\tilde{g_1}$, στοιχεία της $\tilde{g_2}$, .., στοιχεία της $\tilde{g_s}$. Τότε e διατετ. βάση του V και

$$[T]_e^e = \begin{bmatrix} [T_1]_{\tilde{g_1}}^{\tilde{g_1}} & & 0 \\ & [T_2]_{\tilde{g_2}}^{\tilde{g_2}} & \\ 0 & & [T_s]_{\tilde{g_s}}^{\tilde{g_s}} \end{bmatrix}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 155

Έστω $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτ. γινόμενο $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n}$ ισομετρία. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ (όχι αναγκαία η συνήθης) ώστε

$[T]_g^g = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & 0 \\ 0 & & \ddots B_q \end{bmatrix}$ όπου B_j 1x1 ή 2x2 και όπως στη διατύπωση του Θεωρ. 154.

ΑΠΟΔ: Συνδυασμός του Θεωρ. 154 με την Πρόταση 149.

ΠΟΡΙΣΜΑ 156 (Πιο γενικό από Πόρισμα 155)
Έστω $(V, \langle \, \rangle)$ χ.ε.γ. πεπερασμένης διάστασης και $T: V \to V$ ισομετρία
Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση g του V ώστε
$[T]_g^g = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots B_q \end{bmatrix}$ και B_i όπως στη διατύπωση του Θεωρ. 154.

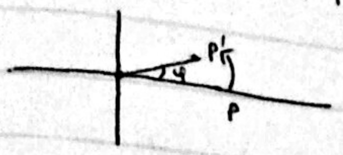
ΑΠΟΔ: Ίδια με την απόδειξη του Πορίσματος 155
(δηλ. το πόρισμα 156 μας λέει ότι με τις υποθέσεις που υπάρχουν T-αναλλοίωτοι υπόχωροι $W_1, \dots, W_q$ του V ώστε
(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_q$
(ii) W_i ορθογ. με το W_j για $i \neq j$
(iii) $\dim W_i = 1$ ή 2

ΑΝΑΛΥΣΗ: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος $n = 1$ ή 2

ΑΝΑΛΥΣΗ 157: Υποθέτουμε $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ορθογώνιος
(Γενικό Συμπέρασμα) (i) Αν $\det A = 1$ A "στροφή"
(ii) Αν $\det A = -1$ A "ορθογώνιος" ή "κατοπτρισμός" ή "ανάκλαση"

2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ.
1η $\det A = 1_{\mathbb{R}}$ ή 2η $\det A = -1_{\mathbb{R}}$
1η περίπτωση: $\det A = 1$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\varphi \in [0, \pi]$ ώστε
$A = \begin{bmatrix} \text{συνφ} & -\text{ημφ} \\ \text{ημφ} & \text{συνφ} \end{bmatrix}$ ή $A = \begin{bmatrix} \text{συνφ} & \text{ημφ} \\ -\text{ημφ} & \text{συνφ} \end{bmatrix}$
Στην 1η περίπτωση A δίνει στροφή στο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο (0,0) κατά γωνία φ αντίστροφη/φορά των δεικτών του ρολογιού. Στην 2η περίπτωση ο A δίνει στροφή στο $\mathbb{R}^2$ με κέντρο (0,0) κατά

γωνία φ σύμφωνη με την φορά των δεικτών του ρολογιού.



$P \mapsto P'$ στην 1η περίπτωση

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΤΟΥ A ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Ιδιοτιμές $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

(Αν $\varphi = 0$ $A = I_2$, ιδιοτιμές 1 με πολλαπλ. 2

$\varphi = \pi$ $A = -I_2$ ιδιοτιμές -1 με πολλαπλ 2

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 ($\det A = -1$)

Θέτουμε $W = V_A(1)$, $L = V_A(-1)$.

Τότε $\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{R}} L = 1$ και W, L ορθοσυμπληρωματικοί του $\mathbb{R}^2$. Έστω e_1 ορθοκανονική βάση του W e_2 ορθοκανονική βάση του L. Θέτουμε $P = [e_1|e_2] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Τότε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Γεωμετρικά A ορθογώνιος κατοπτρισμός στο $\mathbb{R}^2$ ως προς τον υπόχωρο W. Δηλ. ο A αντιστοιχεί στην απεικόνιση $ae_1 + be_2 \mapsto ae_1 - be_2$ για $a, b \in \mathbb{R}$

Ιδιοτιμές του A στο $\mathbb{R}$

1	πολλαπλ. 1
-1	-״- 1

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Υπάρχει $\varphi \in [0, \pi]$ ώστε $A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix}$ ή $A = \begin{bmatrix} -\sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix}$

ΑΝΑΛΥΣΗ 158 (Θεώρημα Euler)

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορθογώνιος.

4 ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1η περίπτωση: $A = I_3$, οταυτοτικός 3×3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ Αφήνει όλα τα σημεία ακίνητα. ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$: 1 με πολ/πλα 3 Είναι διαγωνίσιμος (ως διαγώνιος).

2η περίπτωση: $A = -I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ Αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $T(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς την αρχή των αξόνων. ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{R}$: -1 με πολ/πλα 3 Διαγώνιος ως

Διαγώνιος $\det A = -1$

3η περίπτωση: $\det A = 1$ $A \neq I_3$

Θέτουμε $W = V_A(1)$. Τότε $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$

(Αποδ. Έχουμε $A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \Rightarrow \chi_A(x)$ έχει τουλάχιστον 1 πραγματική ρίζα λ και βρίσκουμε αντίφαση. Υποθέτουμε πρώτα 1 όχι ιδιοτιμή του A και βρίσκουμε αντίφαση. Αν είναι με πολλ/τα 3 $\det A = -1$ αντίφαση. Αφού A ορθογ $\lambda = -1$. Αν είναι με πολλαπλότητα 1 υπάρχει $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ ιδιοτιμή. Τότε $\bar{\mu}$ ιδιοτιμή $\bar{\mu} \neq \mu$ $\det A =$ γινόμενο ιδιοτιμών (αφού A διαγων. στο $\mathbb{C}$)
$\det A = (-1)\lambda \cdot \bar{\lambda} = -1$ αντίφαση) Άρα 1 ιδιοτιμή κλπ.

Θέτουμε $L = W^{\perp}$ δηλ. το ορθοσυμπλήρωμα του W στο $\mathbb{R}^{3\times 1}$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} L = 3 - \dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

Υπάρχει μοναδική $\varphi \in [0, \pi]$ με $1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi = TrA$ (1) Το A περιγράφει περιστροφή με 1-διάστατο άξονα περιστροφής W, στα επίπεδα κάθετα με το W (δηλ. παρ/λα στο L) κοινή γωνία περιστροφής φ που δίδεται από την (1). Έστω e_1 ορθοκανονική βάση του W και e_2, e_3 ορθοκανονική βάση του L. Θέτουμε $P = [e_1 | e_2 | e_3]$. Τότε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ 0 & \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix} \text{ ή } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi \\ 0 & -\eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix}$$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Αν $\varphi \in (0, \pi]$

1	πολ/τα 1
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$	-//-
$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$	-//-

Αν $\varphi = \pi$

1	πολ/τα 1
-1	-//- 2

και A διαγωνίσιμος στο $\mathbb{R}$.

4η περίπτωση $\det A = 1$ και $A \neq I_3$.

$\dim W = 1$ Θέτουμε $W = V_A(-1)$ $L = W^{\perp}$. Τότε υπάρχει μοναδική $\varphi \in (0, \pi]$ ώστε $-1 + 2\sigma\upsilon\nu\varphi = TrA$. Τότε A γεωμετρικά πρώτα περιστροφή κατά κοινή γωνία φ με άξονα περιστροφής W στα επίπεδα κάθετα με το W (δηλ. παράλληλα με το L και μετά ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το επίπεδο L (ΠΑΡΑΤ: Ο A μπορεί να περιγραφεί και σαν πρώτα ορθογώνιος κατοπτρισμός ως προς το επίπεδο L κ μετά στροφή με κοινή γωνία φ στα επίπεδα κάθετα στο W). Έστω e_1 ορθ. βάση του W και e_2, e_3 ορθ. βάση του L. Θέτουμε $P = [e_1 | e_2 | e_3]$. Τότε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Αν $\varphi \in (0, \pi)$

-1	πολ/ητα	1
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$	-ιι-	1
$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$	-ιι-	1

Αν $\varphi = 0$

1	πολ/ητα	1
1	-ιι-	2

και A διαγ. στο $\mathbb{R}$.